Correction du contrôle 5
Fonctions affines et échantillonnage

Solution de l'exercice 1.

1. On développe f_1 de la façon suivante :

$$f_1(x) = x \times 3x + x \times (-2) = 3x^2 - 2x.$$

Pour la fonction f_5, on écrit

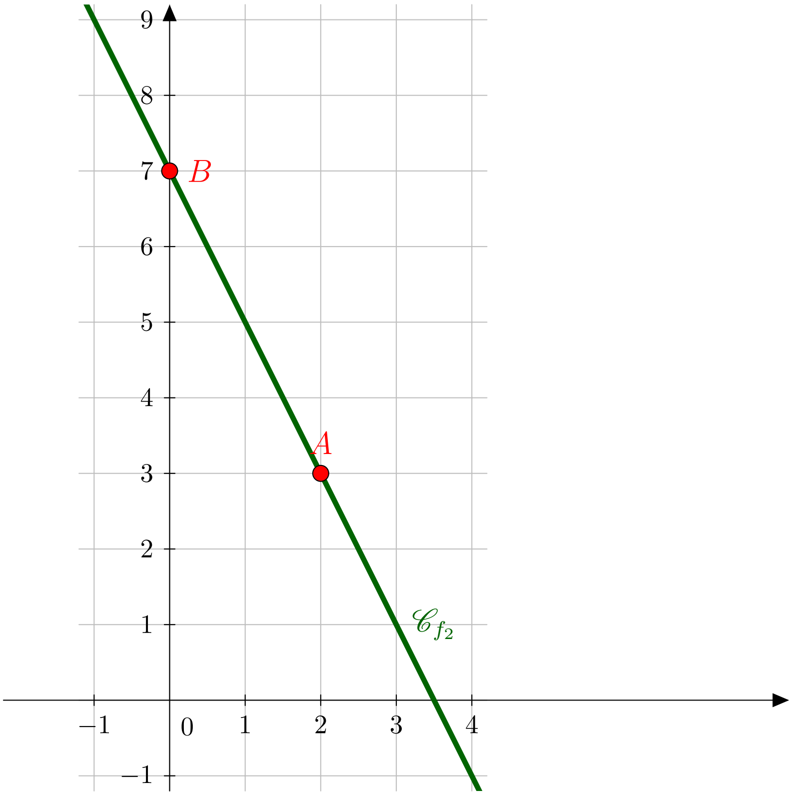
$$f_5(x) = 12 - 3x - 7 = -3x + 5.$$

2. A l'aide de la question précédente, on s'aperçoit que la fonction f_1 n'est pas affine (mais quadratique). La fonction f_3 n'est pas une fonction affine non plus, à cause de la présence de « x » au dénominateur (f_3 est une fonction dite rationnelle). Les fonctions affines sont f_2, f_4, f_5 et f_6.
3. Pour chacune des fonctions, on note a le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.
Pour la fonction f_2, les coefficients sont $a = -2$ et $b = 7$.
Pour la fonction f_4, les coefficients sont $a = 0$ et $b = -3,35$.
Pour la fonction f_5, les coefficients sont $a = -3$ et $b = 5$.
Pour la fonction f_6, les coefficients sont $a = \sqrt{3}$ et $b = \frac{6}{5}$.
4. Parmi ces six fonctions, seule la fonction f_4 est constante car son coefficient directeur est nul, $a = 0$.
5. Aucune de ces fonctions n'est linéaire car aucune d'elles ne passe par l'origine c'est-à-dire n'a de coefficient b qui soit nul.
6. On cherche à résoudre $f_2(x) = 3$. Par définition de f_2, il nous faut résoudre $7 - 2x = 3$:

$$\begin{aligned}
& & 7 - 2x &= 3 \\
&\Leftrightarrow & -2x &= 3 - 7 \\
&\Leftrightarrow & -2x &= -4 \\
&\Leftrightarrow & x &= \frac{-4}{-2} \\
&\Leftrightarrow & x &= 2.
\end{aligned}$$

L'unique solution de cette équation est donc $x = 2$.

7. Pour tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_{f_2}$ de f_2 il suffit de placer deux points. On sait déjà par la question 6 que l'unique antécédent de 3 est 2 et que donc l'image de 2 est 3 ou encore que $\mathscr{C}_{f_2}$ passe par le point $A(2;3)$. On sait de plus que l'ordonnée à l'origine de f_2 est $b = 7$. Donc $\mathscr{C}_{f_2}$ passe par le point $B(0;7)$. On place ces points dans le graphique suivant et l'on trace la droite passant par ces deux points pour obtenir $\mathscr{C}_{f_2}$.



Solution de l'exercice 2.

1. La population totale est l'ensemble de la population française et le caractère que l'on étudie en interrogeant chaque individu est de savoir si l'individu est une femme ou un homme.
2. D'après le tableau, le nombre de français est de $34\ 534\ 967 + 32\ 455859 = 66\ 990\ 826$. La proportion de femmes en France est donc de
$$p = \frac{34\ 534\ 967}{66\ 990\ 826} \simeq 0,52.$$
3. Un bon échantillon doit être construit en tirant *aléatoirement*, *uniformément* et sans remise dans la population. La population est suffisamment grande pour que l'aspect sans remise puisse être négligé ici. Cependant le tirage n'est pas uniforme. En effet les français que l'on considère ici sont tous députés (c'est-à-dire membre de l'Assemblée Nationale) qui est une caractéristique commune à nos individus de notre échantillon et d'importante. On peut par exemple considérer que tous ces individus ont un certain goût pour la politique au sens large et une envie de s'y impliquer. A travers cet échantillon on exclut les français qui ne s'intéresse pas ou peu à la politique par exemple.
4. Puisque l'Assemblée Nationale constitue notre échantillon, la taille de notre échantillon est le nombre total de députés :
$$n = 226 + 346 = 572.$$
5. L'intervalle de fluctuation est donc donné par
$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,52 - \frac{1}{\sqrt{572}}; 0,52 + \frac{1}{\sqrt{572}}\right] = [0,48; 0,56]$$

6. A l'Assemblée Nationale, la fréquence du nombre de femmes est de $f = \frac{226}{572} = 0,4$. Donc
$$f \notin I.$$
Donc cette faible proportion de femmes à l'Assemblée n'est pas dû simplement à un écart aléatoire lors de la construction d'un échantillon mais correspond à un écart trop important qui montre que les femmes sont statistiquement sous-représentée à l'Assemblée Nationale.

Solution de l'exercice 3.

1. Au départ l'eau atteint une hauteur $h = 0,12$ donc remplie un parallélépipède de largeur celle de la baignoire $L = 2$, de longueur $l = 1$ et de hauteur $h = 0,12$. Le volume associé est donc de
$$v(0) = 0,12 \times 2 \times 1 = 0,24m^3.$$
2. Après $x = 5$ minutes, l'eau a atteint la hauteur $h = 0,28$ et remplit donc un volume égal à
$$v(5) = 0,28 \times 2 \times 1 = 0,56m^3.$$
3. Par définition, l'ordonnée à l'origine est la valeur de v à $x = 0$ c'est-à-dire $v(0)$ et vaut donc d'après la question 1, $b = 0,24$.
4. D'après la question 1, le graphe de v passe par le point $(0; 0,24)$ et d'après la question 2, il passe aussi par le point $(5; 0,56)$. Par conséquent d'après le cours avec $A(0; 0,24)$ et $B(5; 0,56)$, on obtient :
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0,56 - 0,24}{5 - 0} = \frac{0,32}{5} = 0,064.$$
5. D'après les questions 3 et 4, on a
$$v(x) = ax + b = 0,064x + 0,24.$$
6. Lorsque $x = 15$, on obtient un volume de
$$v(15) = 0,065 \times 15 + 0,24 = 1,2m^3.$$
7. La volume totale de la baignoire est de $2 \times 1 \times 1 = 2m^3$. Il est donc plus grand que le volume d'eau à $x = 15$. On en déduit qu'Archimède n'a pas fait déborder son bain à son retour à $x = 15$.